Aufgaben: Repetition Ökonometrie I - Lösungen

Aufgabe 1 (Radiowerbung für Kino):

Die Schätzung der Regressionsgleichung

$$U_t = \alpha + \beta W_t + u_t \qquad U_t\text{: Wochenumsatz,} \qquad W_t\text{: Werbeausgaben}$$

ergibt: $\hat{\alpha} = 15000,\ \hat{\beta} = 1.07,\ SE(\hat{\beta}) = 0.1$.

a)

W =	U =
0	15 000
3000	18 210
6000	21 420
9000	24 630

Der Vertrauensbereich einer mithilfe eines linearen Regressionsmodells erstellten Prognose ergibt sich:

- aus der Varianz des Störterms (u_t) und
- der Stichprobenverteilung der geschätzten Regressionsparameter ($\hat{\alpha}$,$\hat{\beta}$).

Der Vertrauensbereich ist beim Stichprobenmittel der exogenen Variablen am kleinsten (vgl. Maddala, Seite 86). Das Stichprobenmittel dürfte bei ca. $W = 3000$ liegen. Die entsprechende Prognose ist am sichersten. Die Prognose für $W = 9000$ ist am unsichersten. Dieser Wert liegt nicht nur am weitesten vom Mittelwert entfernt, sondern sogar ausserhalb der der Schätzung zugrundeliegenden Stichprobe. Wie sich der Zusammenhang zwischen Werbung und Umsatz bei dieser Höhe der Werbeausgaben verhält, wurde somit gar nicht untersucht.

b) Der kritische Wert ist $\beta = 1$, weil dann die Werbeausgaben gerade in Form von zusätzlichem Umsatz zurückfliessen. Aufgrund der Punktschätzung $\hat{\beta} = 1.07$ könnte man dem Kinobesitzer empfehlen, Werbung zu betreiben. Allerdings ist $\hat{\beta} = 1.07$ eine Schätzung und das wahre β kann auch kleiner als 1 sein.

b1) Vertrauensbereich für β**:** Der t-Wert für ein 95%-Vertrauensintervall (12 - 2 = 10 Freiheitsgrade) beträgt 2.228, der Standardfehler ist $SE(\hat{\beta}) = 0.1$. Es gilt somit:

Prob$(1.07 - 2.228 \cdot 0.1 \leq \beta \leq 1.07 + 2.228 \cdot 0.1) = 0.95$

Prob$(0.8472 \leq \beta \leq 1.2928) = 0.95$

Die Null-Hypothese $\beta = 1$ kann folglich nicht abgelehnt werden und es besteht also durchaus die Möglichkeit, dass das wahre β kleiner als 1 ist.

b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\beta > 1$?

Wir wissen, dass $\frac{\hat{\beta}-\beta}{SE(\hat{\beta})}$ t-verteilt ist. Der t-Wert für die Hypothese $\beta = 1$ beträgt $t = \frac{\hat{\beta}-\beta}{SE(\hat{\beta})} = \frac{1.07-1}{0.1} = 0.7$. Da $\beta > 1$ gleichbedeutend mit $t < 0.7$ ist, gilt:

Prob($\beta > 1$) = Prob($t < 0.7) = 0.75$ (t-Verteilung mit 10 Freiheitsgraden).

Man kann also sagen, dass es sich mit 75% (25%) Wahrscheinlichkeit lohnt (nicht lohnt), Werbung zu betreiben.

Aufgabe 2 (Interpretation von Regressionsergebnissen)

a) Der prozentuale Anteil der Varianz der abhängigen Variablen, der durch die Regressionsgleichung erklärt wird, ist durch R^2 = 0.997 oder 99.7% gegeben.

b) Eine Regressionsgleichung, in der die abhängige Variable um eine Periode verzögert als erklärende Variable erscheint, kann wie folgt interpretiert werden:

(1) $y_t^* = \alpha + \beta_1 x_{1_t} + \beta_2 x_{2_t} + \ldots + \varepsilon_t$ langfristige Beziehung

(2) $y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda) y_{t-1}$ mit $0 \le \lambda \le 1$ kurzfristige Anpassung

Substitution von (1) in (2) ergibt:

(3) $y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta_1 x_{1_t} + \lambda\beta_2 x_{2_t} + \ldots + (1-\lambda) y_{t-1} + u_t$

Der Koeffizient vor der verzögerten abhängigen Variablen, LOG(KONSRK(-1)), ist $(1-\lambda) = 0.866$, d.h. $\lambda = 0.134$.
Der Koeffizient vor der Einkommensvariablen, LOG(EINRK), ist $\lambda\beta_1 = 0.149$. Dies ist die kurzfristige Einkommenselastizität.
Die langfristige Einkommenelastizität ist $\beta_1 = 0.149 / 0.134 = 1.112$

c) Die DW-Teststatistik von 1.462 liegt im Unbestimmtheitsbereich (d_L = 1.22, d_U = 1.73). Der DW-Test ist hier aber nicht adäquat, weil die abhängige Variable der Gleichung zeitverzögert als erklärende Variable vorkommt. In diesem Fall ist der Durbin-h-Test anzuwenden. Die standard-normalverteilte Durbin-h-Statistik ist:

$$h = r(1)\sqrt{\frac{n}{1-n s^2}}$$

$r(1)$ ist der Autokorrelationskoeffizient der Residuen 1. Ordnung, n ist der Stichprobenumfang (35) und s^2 ist die geschätzte Varianz des Parameters vor der zeitverzögerten abhängigen Variablen (0.0707^2). $r(1)$ kann man approximativ als $r(1)$ = 1-DW/2 = 0.2688 berechnen. Dies ergibt:

$$h = 0.2688\sqrt{\frac{35}{1-35 * 0.0707^2}} = 1.75$$

Der kritische Wert für einen einseitigen Test (Alternativhypothese: positive Autokorrelation) auf dem 5%-Niveau ist 1.645 (Standard-Normalverteilung). Somit ist die Null-Hypothese eines nicht-autokorrelierten Störterms abzulehnen.

d) Um die Hypothese einer langfristigen Einkommenselastizität zu testen, wird die Gleichung als nicht-lineare Regression in der folgenden Form geschätzt:

LOG(KONSRK)=C(5)*C(1)+C(5)*C(2)*LOG(EINRK)+C(5)*C(3)*LOG(OBLR)
+C(5)*C(4)*LOG(ARBLOS)+(1-C(5))*LOG(KONSRK(-1))

C(2) ist dann die langfristige Einkommenselastizität und die Hypothese C(2) = 1 kann mit einem t-Test getestet werden. Alternativ kann man die Restriktion C(2) = 1 in die Gleichung einbauen und die entsprechende restringierte Residuenquadratsumme in einem F-Test mit der unrestringierten Residuenquadratsumme vergleichen.

e) Unterteilt man die Stichprobe in zwei Subperioden a und b, so können die 5 Parameter (C(1) bis C(5)) in den beiden Regressionen unterschiedliche Werte annehmen. Schätzt man die Gleichung über den gesamten Zeitraum, so zwingt man die Parameter auf einheitliche Werte, z.B. $C(2)^a = C(2)^b = C(2)$. Insgesamt gibt es 5 solche Restriktionen. Man hat somit ein *unrestringiertes* Modell, in welchem Parameteränderungen zwischen den beiden Subperioden zugelassen sind, und ein *restringiertes* Modell mit 5 Restriktionen, in welchem *stabile Parameter* unterstellt sind.

$URSS = RSS^a + RSS^b = 0.001316 + 0.000449 = 0.001765$ (unrestringert)
$RRSS = RSS^c = 0.003093$ (restringiert).

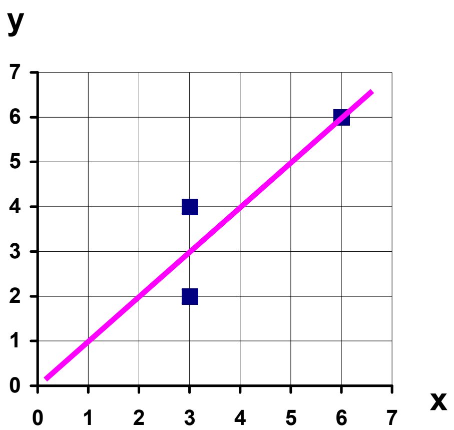
Eingesetzt in die Formel für den F-Test ergibt sich:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/5}{URSS/(35-10)} = 3.76$$

Bei einem kritischen F(5,25)-Wert von etwa 2.5 (5%-Niveau) ist die Null-Hypothese stabiler Parameter abzulehnen.

Aufgabe 3 (Regression mit drei Beobachtungspunkten):

a) Regressionsgerade $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \;\; \hat{\alpha} = 0, \;\; \hat{\beta} = 1$



$\bar{y} = 4, \qquad TSS = 2^2 + 0^2 + 2^2 = 8, \qquad RSS = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2,$

$ESS = TSS - RSS = 6, \qquad R^2 = ESS/TSS = 0.75$

b) Unter der Null-Hypothese $\beta = 0$ verläuft die beste Regressionsgerade horizontal durch das Mittel der y-Werte, $\bar{y} = 4$. Die entsprechende restringierte Residuenquadratsumme ist gleich dem TSS von a), d.h. $RRSS = TSS = 8$. Die unrestringierte Residuenquadratsumme ist das RSS von a), d.h. $URSS = RSS = 2$. Eingesetzt in die Formel für den F-Test:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/r}{URSS/(n-k-1)} = \frac{(8-2)/1}{2/(3-1-1)} = 3$$

Der kritische F(1,1)-Wert ist 161 (5%-Niveau), d.h. die Null-Hypothese $\beta = 0$ kann bei weitem nicht abgelehnt werden. Mit anderen Worten: Die drei Beobachtungspunkte können auch von einer "wahren" Regressionsgeraden generiert worden sein, die horizontal auf dem Niveau $\bar{y} = 4$ verläuft.

c) Bei einer "verdreifachten" Stichprobe ergibt sich ein F-Wert von

$$F = \frac{(24-6)/1}{6/(9-1-1)} = 21$$

Der kritische F(1,7)-Wert ist 5.59 (5%-Niveau), d.h. die Null-Hypothese $\beta = 0$ ist abzulehnen. Mit anderen Worten: Beobachtet man dreimal die drei in der Grafik dargestellten Punkte, so ist die Vorstellung, dass diese neun Punkte von einer "wahren" Regressionsgeraden generiert worden sind, die horizontal auf dem Niveau $\bar{y} = 4$ verläuft, unwahrscheinlich.