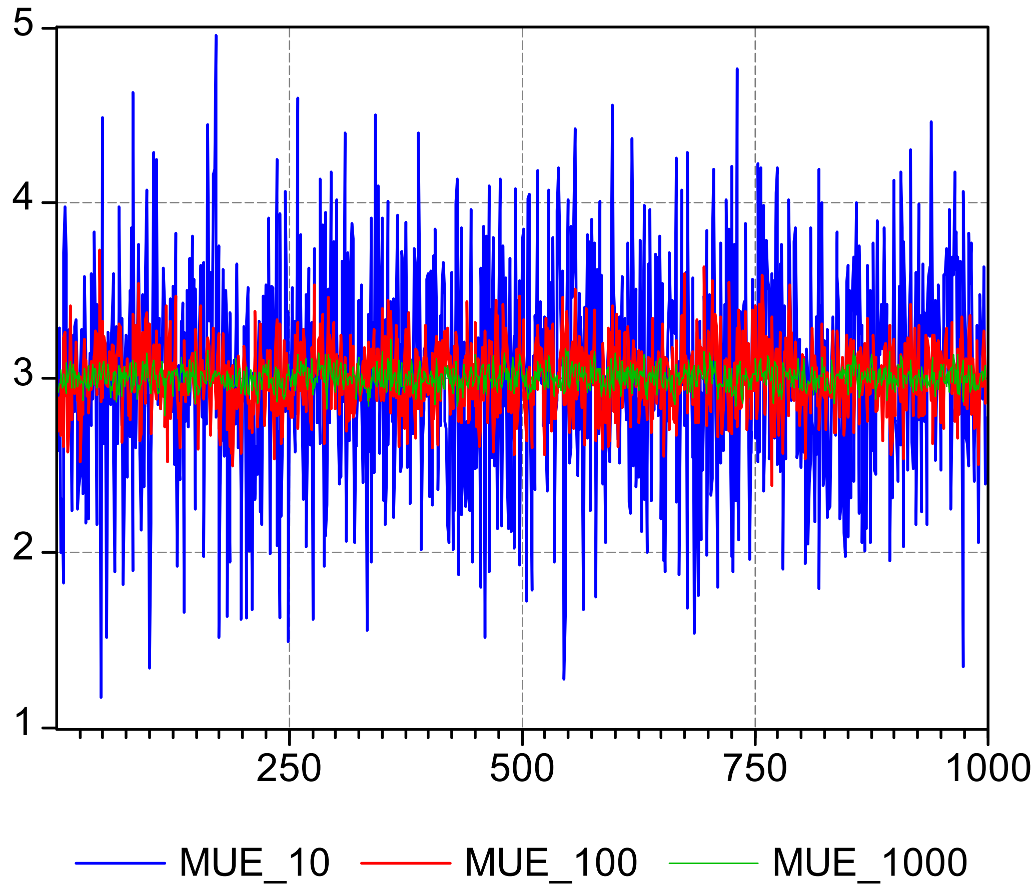
Numerisches Experiment zur Illustration der Stichproben-verteilung von Mittelwertschätzungen einer Normalverteilung

Datengenerierender Prozess: $y_t \sim IN(\mu, \sigma^2)$
mit Mittelwert μ = 3 und Varianz σ^2 = 4 (σ = 2)

Aus $y_t \sim IN(\mu, \sigma^2)$ wird eine Stichprobe mit n = 10 Beobachtungen gezogen und daraus der Mittelwert berechnet: $\hat{\mu} = \sum y_i / n$
Dieser Vorgang wird 1000 mal wiederholt. Dies ergibt 1000 Mittelwert-schätzungen aus Stichproben mit je 10 Beobachtungen, im Folgenden als MUE_10 bezeichnet.

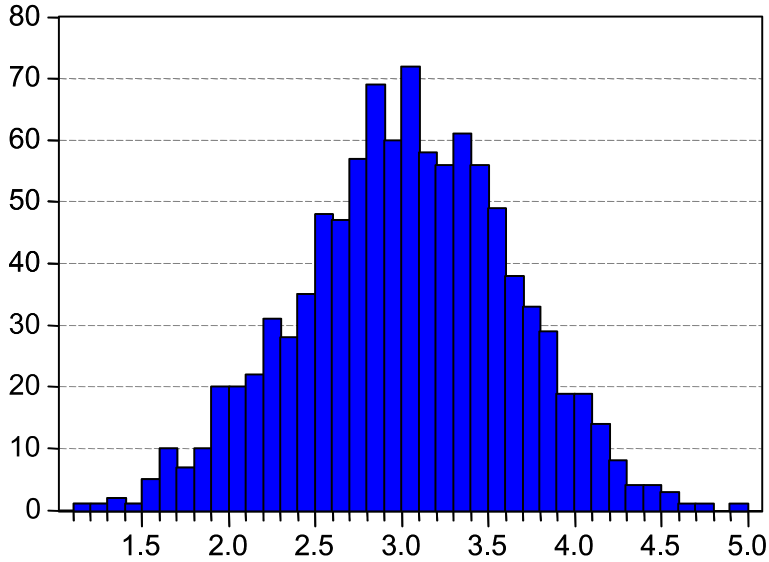
Analog für Stichproben mit je 100 Beobachtungen: MUE_100
Analog für Stichproben mit je 1000 Beobachtungen: MUE_1000

1000 Mittelwertschätzungen aus Stichproben mit 10, 100 und 1000 Beobachtungen



Verteilung der Mittelwertschätzungen

MUE_10: Schätzungen aus Stichproben mit je 10 Beobachtungen:

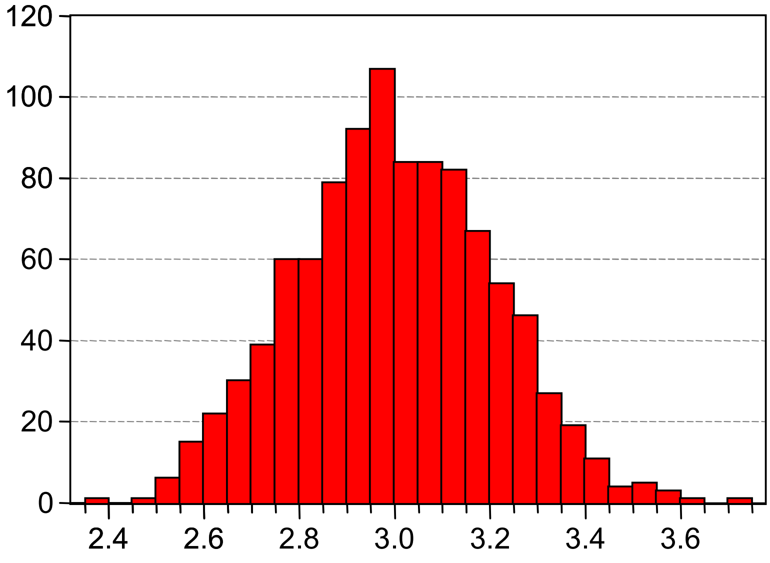


Mean	3.025576
Median	3.038966
Maximum	4.954310
Minimum	1.175211
Std. Dev.	0.616602

Die einzelnen Mittelwertschätzungen $\hat{\mu}$ weichen aufgrund des kleinen Stichprobenumfangs zum Teil stark vom "wahren" Mittelwert des datengenerierenden Prozesses ab (μ = 3). Die Schätzungen sind jedoch ***unverzerrt.*** Diese Eigenschaft kommt darin zum Ausdruck, dass die Schätzungen symmetrisch um den wahren Mittelwert herum verteilt sind.

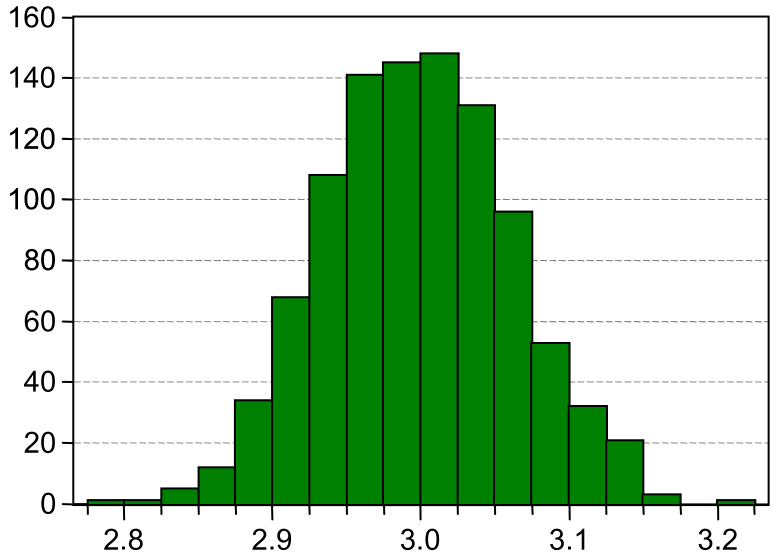
Analytisch lässt sich die Standardabweichung der Mittelwertschätzung wie folgt berechnen: $\sigma_{\hat{\mu}} = \sigma / \sqrt{n} = 2/\sqrt{10} = 0.6325$. Dies entspricht ziemlich genau der aus dem Experiment berechneten Standardabweichung von 0.6166.

MUE_100: Schätzungen aus Stichproben mit je 100 Beobachtungen:



Mean	3.000642
Median	2.992568
Maximum	3.727022
Minimum	2.380969
Std. Dev.	0.205661

MUE_1000: Schätzungen aus Stichproben mit je 1000 Beobachtungen:



Mean	2.998004
Median	2.998152
Maximum	3.215748
Minimum	2.778739
Std. Dev.	0.062676

Bei Stichproben von n = 100 bzw. 1000 Beobachtungen konzentrieren sich die Mittelwertschätzungen näher um den wahren Mittelwert von 3 herum. Darin zeigt sich die ***Konsistenz*** des Schätzers $\hat{\mu} = \sum y_i / n$.

Die analytisch berechnete Standardabweichung der Mittelwertschätzung ist $\sigma_{\hat{\mu}} = \sigma / \sqrt{n} = 2/\sqrt{100} = 0.2$ für MUE_100 bzw. $\sigma_{\hat{\mu}} = \sigma / \sqrt{n} = 2/\sqrt{1000} = 0.06325$ für MUE_100, was wiederum gut mit den aus dem Experiment berechneten Standardabweichungen übereinstimmt.

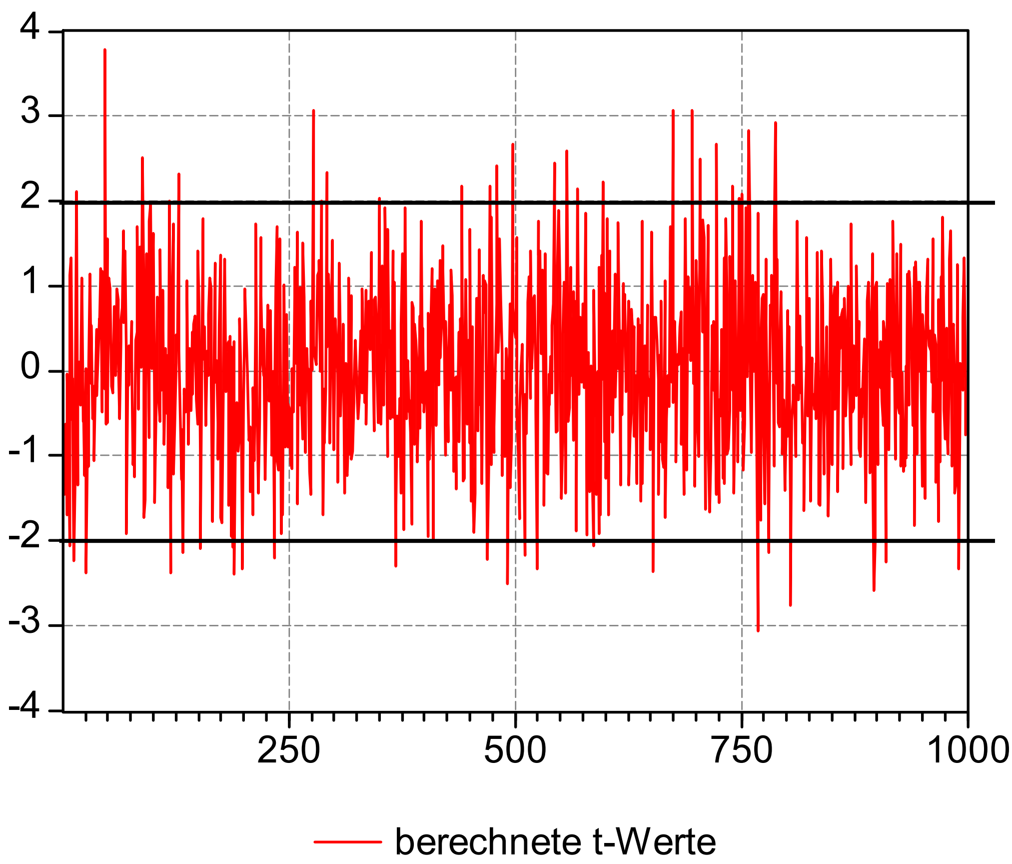
Hypothesentest

Die Grösse $\dfrac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ (Abweichung der Mittelwertschätzung vom wahren Mittelwert, dividiert durch die geschätzte Standardabweichung der Mittelwertschätzung)

ist t-verteilt mit n - 1 Freiheitsgraden.

Für grosse Stichproben (z.B. n = 100) ist der kritische t-Wert für einen Test auf dem 5% Signifikanzniveau rund 2 (1.96 wenn n gegen Unendlich geht). Das heisst: $\text{Prob}\left(|t|>2=0.05\right)$. Testet man die wahre Nullhypothese μ = 3 auf dem 5%-Niveau, so wird diese folglich in rund 50 der 1000 Stichproben mit einem berechneten t-Wert von absolut grösser als 2 fälschlicherweise abgelehnt.

t-Test H$_0$: μ = 3 (Experiment mit n = 100)



Das Experiment wurde mit folgendem ***Programm*** in EViews 4.1 durchgeführt. Neuere EViews-Versionen führen aufgrund eines anderen Zufallszahlen-generators zu numerisch leicht unterschiedlichen Ergebnissen. Man kann den Zufallszahlengenerator auf die Version EViews 4.1 zurücksetzen, indem man "rndseed" durch "rnseed(type=kn4)" ersetzt. Das Programm ist auf der Internetseite zur Volesung Ökonometrie I im Anhang als *Simulationsprogramm 1* zu finden.

```
'  SimNormal:
'  Schätzung MUE und SIGMA aus künstlich generierter Normalverteilung

'  Öffnen eines Workfiles und Festlegen des Stichprobenumfangs
        workfile simpreg U 1 1000

' 10 Beobachtungen
FOR !j = 1 to 1000
'  Generieren von x mit MUE = 3 und SIGMA = 2
        scalar xseed = 1421+!j
        rndseed(type=kn4) xseed
        smpl 1 10
        genr x = 3 +2*nrnd
        smpl 1 1000
'  Schätzung MUE und SIGMA
        series MUE10
        series SIGMA10
        series VARIANCE10
        series TVALUE10
        MUE10(!j) = @mean(x)
        SIGMA10(!j) = @stdev(x)
        VARIANCE10(!j) = @var(x)
        TVALUE10(!j) = (MUE10(!j)-3)/(SIGMA10(!j)/@sqrt(10))
NEXT

' 100 Beobachtungen
FOR !j = 1 to 1000
'  Generieren von x mit MUE = 3 und SIGMA = 2
        scalar xseed = 1421+!j
        rndseed(type=kn4) xseed
        smpl 1 100
        genr x = 3 +2*nrnd
        smpl 1 1000
'  Schätzung MUE und SIGMA
        series MUE100
        series SIGMA100
        series VARIANCE100
        series TVALUE100
        MUE100(!j) = @mean(x)
        SIGMA100(!j) = @stdev(x)
        VARIANCE100(!j) = @var(x)
        TVALUE100(!j) = (MUE100(!j)-3)/(SIGMA100(!j)/@sqrt(100))
NEXT

' 1000 Beobachtungen
FOR !j = 1 to 1000
'  Generieren von x mit MUE = 3 und SIGMA = 2
        scalar xseed = 1421+!j
        rndseed(type=kn4) xseed
        smpl 1 1000
        genr x = 3 +2*nrnd
        smpl 1 1000
'  Schätzung MUE und SIGMA
        series MUE1000
```

```
        series SIGMA1000
        series VARIANCE1000
        series TVALUE1000
        MUE1000(!j) = @mean(x)
        SIGMA1000(!j) = @stdev(x)
        VARIANCE1000(!j) = @var(x)
        TVALUE1000(!j) = (MUE1000(!j)-3)/(SIGMA1000(!j)/@sqrt(1000))
NEXT
```