SIMULTANE GLEICHUNGSSYSTEME (Pindyck/Rubinfeld, S.287-302)

Im Modell der multiplen linearen Regression

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t \qquad (1)$$

wird angenommen, die erklärenden Variablen x_1, x_2, ... seien exogen, d.h. sie könnten bei der Analyse ihres Einflusses auf y als vorgegeben (bzw. in einem von (1) unabhängigen Modell bestimmt) betrachtet werden ($x \rightarrow y$). Unter dieser Annahme sind die x-Variablen nicht mit dem Störterm u_t korreliert und eine Regressionsrechnung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ("ordinary least squares") liefert unverzerrte und konsistente Schätzwerte für die Parameter α, β_1, ... des Modells. Häufig sind ökonomische Zusammenhänge jedoch interdependent ($x \leftrightarrow y$); in solchen Fällen muss man andere Schätzverfahren anwenden.

Beispiel für einen exogenen Einfluss ist das Wetter hinsichtlich der landwirtschaftlichen Produktion. Während die Weltwirtschaft für ein kleines Land wie die Schweiz exogenen Charakter hat, sind die Wirtschaftsentwicklung in der EG und den USA interdependent. Aehnlich ist der Zinssatz ist für das Sparverhalten eines einzelnen Haushalts exogen, in ihrer Gesamtheit dürften die Haushalte einer Volkswirtschaft aber mit ihrem Sparverhalten den Zinssatz beeinflussen. Somit ist es z.B. problematisch, bei der Schätzung einer Spar- bzw. Konsumfunktion den Zinssatz als exogen zu betrachten. Dies gilt auch für das Haushaltseinkommen, denn die Konsumnachfrage der Haushalte hat Rückwirkungen auf die in der Konsumgüterproduktion erzielten Einkommen. Modellmässig werden solche Interdependenzen mit simultanen Gleichungssystemen dargestellt: n Gleichungen bestimmen gemeinsam n endogene Variablen in Abhängigkeit von k exogenen Variablen. Schätzt man die Gleichungen eines solchen Gleichungssystems einzeln mit dem "ordinary least squares"-Verfahren, so erhält man - wegen der unzulässigen Exogenitätsannahme - im allgemeinen verzerrte und inkonsistente Parameterschätzungen. Geeignete Schätzverfahren sind u.a.: "Indirect least squares" und "Two-stage least squares".

Als einfaches Beispiel eines simultanen Gleichungssystems betrachten wir ein Marktmodell (Pindyck/Rubinfeld, S.288 ff.):

$$
\begin{aligned}
Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \epsilon_t & \alpha_2 > 0 \quad \text{Angebot (S)} \\
Q_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + u_t & \beta_2 < 0 \quad \text{Nachfrage (D)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Q_t : angebotene bzw. nachgefragte Menge (endogen)
P_t : Preis (endogen)
Y_t : Einkommen der Haushalte (exogen)

Umformuliert in Abweichungen von den Stichproben-Mittelwerten (z.B. $q_t = Q_t - \bar{Q}$) ergibt sich aus (2)::

$$
\begin{aligned}
q_t &= \alpha_2 p_t + \epsilon_t \\
q_t &= \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_t
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Löst man diese sog. Strukturgleichungssysteme (2) bzw. (3) nach den endogenen Variablen auf, so erhält man die sogenannte reduzierte Form. Aus (3) erhält man:

$$
\begin{aligned}
q_t &= \frac{\alpha_2 \beta_3}{\alpha_2 - \beta_2} y_t + \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2 \epsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} = \pi_1 y_t + v_{1t} \\
p_t &= \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2} y_t + \frac{u_t - \epsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} = \pi_2 y_t + v_{2t}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Als erklärende Variable von q_t und p_t erscheint nun nur noch die exogene Variable y_t. Die Parameter π_1 und π_2 der reduzierten Form stellen Kombinationen der α's und β's der Strukturgleichungen dar, die Störterme v_{1t} und v_{2t} setzen sich aus den Störtermen u_t und ϵ_t zusammen.

Verzerrung bei Anwendung des "ordinary least squares"-Verfahrens

Was ist davon zu halten, wenn man Parameter α_2 in der ersten Gleichung von (3) (Preiselastizität des Angebots, falls p und q in Logarithmen gemessen sind) isoliert mit der Methode der kleinsten Quadrate schätzt? Die Schätzformel lautet:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{S_{pq}}{S_{pp}} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_t^2} \tag{5}$$

Diese Schätzung für α_2 ist verzerrt, d.h. $E(\hat{\alpha}_2) \neq \alpha_2$. Dies kann wie folgt gezeigt werden. Zunächst ersetzt man q_t in (5) durch die erste Gleichung von (3):

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\Sigma p_t(\alpha_2 p_t + \epsilon_t)}{\Sigma p_t^2} = \alpha_2 + \frac{\Sigma p_t \epsilon_t}{\Sigma p_t^2}$$

Für den Erwartungswert von $\hat{\alpha}_2$ gilt nun:

$$E(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2 + E\left[\frac{\Sigma p_t \epsilon_t}{\Sigma p_t^2}\right]$$

Wäre p_t exogen und somit unkorreliert mit dem Störterm ϵ_t, so wäre $E\left[\frac{\Sigma p_t \epsilon_t}{\Sigma p_t^2}\right] = 0$, d.h. $E(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2$. Gemäss (3) ist aber p_t endogen und mit ϵ_t korreliert. In diesem Fall ist $E\left[\frac{\Sigma p_t \epsilon_t}{\Sigma p_t^2}\right] \neq 0$ und deshalb $E(\hat{\alpha}_2) \neq \alpha_2$, d.h. verzerrt (unter den getroffenen Annahmen $\alpha_2 > 0$ und $\beta_2 < 0$ sind p_t und ϵ_t negativ miteinander korreliert, so dass die Verzerrung negativ ist). Die Schätzung $\hat{\alpha}_2$ ist des weiteren auch inkonsistent, d.h. die Verzerrung verschwindet selbst in einer unendlich grossen Stichprobe nicht.

"Indirect least squares"

Eine Möglichkeit zur konsistenten Schätzung von α_2 eröffnet sich auf Grundlage der reduzierten Form (4). In beiden Gleichung ist y_t exogen, so dass die Parameter π_1 und π_2 mit der Methode der kleinsten Quadrate unverzerrt und konsistent geschätzt werden können:

$$\hat{\pi}_1 = \frac{\Sigma y_t q_t}{\Sigma y_t^2} \qquad \hat{\pi}_2 = \frac{\Sigma y_t p_t}{\Sigma y_t^2}$$

Aus $\hat{\pi}_1$ und $\hat{\pi}_2$ kann man dann für α_2 die konsistente Schätzung

$$\hat{\alpha}_2^* = \hat{\pi}_1 / \hat{\pi}_2$$

ableiten. Dieses Verfahren wird als "indirect least squares" bezeichnet. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, handelt es sich bei α_2 allerdings um den einzigen Parameter des Modells, der geschätzt werden kann.

Identifikationsproblem

Bevor man in einem simultanen Gleichungssystem Parameter zu schätzen versucht, ist abzuklären, ob dies prinzipiell überhaupt möglich ist. Kann man, bei Gültigkeit des unterstellten (als "wahr" angenommenen) Modells, davon ausgehen, über eine Stichprobe zu verfügen, die eine Identifikation der Modellgleichungen zulässt? Dies ist keineswegs immer der Fall. So würde man für das Modell (3) mit $\beta_3 = 0$ beispielsweise eine Stichprobe erhalten, wie sie in Pindyck/Rubinfeld in Figur 11.2 dargestellt ist: Das diffuse Streudiagramm von Beobachtungspunkten auf der (Q,P)-Ebene lässt offensichtlich keine Rückschlüsse hinsichtich der Angebots- oder Nachfragegleichung zu, d.h. keine der beiden Gleichungen ist identifiziert. Erst der Einfluss des Einkommens in der Nachfragegleichung ($\beta_3 > 0$) erzeugt eine Stichprobe, welche eine Identifikation der Angebotsgleichung ermöglicht (Figur 11.3). Die Nachfragegleichung selbst ist jedoch nicht identifizierbar. Dem entspricht das Resultat von oben, dass mit dem "indirect least squares"-Verfahren aus den Parametern der reduzierten Form, π_1 und π_2, nur der Angebotsparameter α_2 abgeleitet werden kann. Umgekehrt ist z.B. im Modell

$$q_t = \alpha_2 p_t + \alpha_3 w_t + \epsilon_t \qquad \text{(Angebot)}$$

$$q_t = \beta_2 p_t + u_t \qquad \text{(Nachfrage)}$$

durch den exogenen Einfluss von w_t (z.B. Wetter) auf das Angebot die Nachfragegleichung identifiziert, während die Angebotsgleichung nicht identifiziert ist. Beide Gleichungen sind identifiziert, wenn das "wahre" Modell wie folgt aussieht:

$$q_t = \alpha_2 p_t + \alpha_3 w_t + \epsilon_t \qquad \text{(Angebot)}$$

$$q_t = \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_t \qquad \text{(Nachfrage)}$$

Die sog. Ordnungsbedingung für die Identifikation einer Modellgleichung lautet:

> Die Anzahl der in der Gleichung nicht enthaltenen exogenen Modellvariablen muss mindestens so gross sein wie die Anzahl der in der Gleichung enthaltenen endogenen Variablen minus 1.

Dies ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung.

Ueberidentifikation und das "Two-stage least squares"-Verfahren

Im Modell

$$\begin{aligned} q_t &= \alpha_2 p_t + \epsilon_t && \text{(Angebot)} \\ q_t &= \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + \beta_4 w_t + u_t && \text{(Nachfrage)} \end{aligned} \tag{6}$$

ist die Nachfragegleichung nicht identifiziert und die Angebotsgleichung <u>überidentifiziert</u> (Anzahl ausgeschlossene exogene Variablen > Anzahl enthaltene endogene Variablen minus 1). Die reduzierte Form von (6) lautet:

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t + \frac{\alpha_2\beta_4}{\alpha_2-\beta_2} w_t + \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2\epsilon_t}{\alpha_2-\beta_2} = \pi_{11} y_t + \pi_{12} w_t + v_{1t} \\ p_t &= \frac{\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t + \frac{\beta_4}{\alpha_2-\beta_2} w_t + \frac{u_t - \epsilon_t}{\alpha_2-\beta_2} = \pi_{21} y_t + \pi_{22} w_t + v_{2t} \end{aligned} \tag{7}$$

In diesem Modell können wiederum die π-Parameter der reduzierten Form konsistent mit der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden (wie in (4) oben). Das "indirect least squares"-Verfahren liefert nun aber zwei Schätzwerte für α_2, nämlich $\hat{\alpha}_2' = \hat{\pi}_{11}/\hat{\pi}_{21}$ und $\hat{\alpha}_2'' = \hat{\pi}_{12}/\hat{\pi}_{22}$. Zwar sind beide Schätzungen konsistent, sie werden aber in beschränkten Stichproben differieren und jede einzelne Schätzung vernachlässigt relevante Information der vorhandenen Stichprobe.

1. Man führt für die zweite Gleichung in (7) eine Regressionsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate durch und berechnet $\hat{p}_t = \hat{\pi}_{21} y_t + \hat{\pi}_{22} w_t$.

2. Man ersetzt dann in der ersten Gleichung von (6) (Angebot) die mit ϵ_t korrelierte Variable p_t durch $\hat{p}_t$. $\hat{p}_t$ ist eine exakte Linearkombination der exogenen Variablen y_t und w_t und somit - im Unterschied zu p_t - unabhängig vom Störterm ϵ_t der Angebotsgleichung. Somit ist die Schätzung

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\Sigma \hat{p}_t q_t}{\Sigma \hat{p}_t^2}$$

konsistent.

Im unterstellten Modell (6) ist dies der einzige schätzbare Parameter; die Nachfragegleichung ist aufgrund der Ordnungsbedingung nicht identifiziert.