Ergänzende Punkte zum Kapitel "Stationariät und Kointegration ökonomischer Zeitreihen - Schätzung von Fehlerkorrektur-Modellen"

1. Beziehung zwischen verschiedenen stochastischen Prozessen

A) Trendstationärer Prozess:

$$(x_t - \gamma - \delta t) = \rho\big(x_{t-1} - \gamma - \delta(t-1)\big) + \varepsilon_t \quad \text{mit } \varepsilon_t \sim \text{IN}(0, \sigma^2) \text{ und } 0 < \rho < 1$$

Substitution von $\big(x_{t-1} - \gamma - \delta(t-1)\big) = \rho\big(x_{t-2} - \gamma - \delta(t-2)\big) + \varepsilon_{t-1}$ ergibt:

$$(x_t - \gamma - \delta t) = \rho^2\big(x_{t-2} - \gamma - \delta(t-2)\big) + \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1}$$

und nach fortlaufender Rückwärtssubstitution schliesslich:

$$\big(x_t - \gamma - \delta t\big) = \rho^t\big(x_0 - \gamma - \delta 0\big) + \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \rho^{t-1}\varepsilon_1$$

$$= \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \rho^{t-1}\varepsilon_1 \qquad (\text{da } \rho^t \to 0)$$

➔ ${}_0E(x_t) = \gamma + \delta t$ und $\text{var}(x_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}$

${}_{t-1}E(x_t) = \gamma + \delta t + \rho\big(x_{t-1} - \gamma - \delta(t-1)\big)$

B) Für ρ = 1 geht A in einen ***Random Walk mit Drift*** über:

$$(x_t - \gamma - \delta t) = \big(x_{t-1} - \gamma - \delta(t-1)\big) + \varepsilon_t$$

$$x_t = x_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

Fortlaufende Rückwärtssubstitution

$x_{t-1} = x_{t-2} + \delta + \varepsilon_{t-1}$ ergibt schliesslich:

$$x_t = x_0 + \delta t + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \ldots + \varepsilon_1 = x_0 + \delta t + \sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$$

➔ ${}_0E(x_t) = x_0 + \delta t$ und $\text{var}(x_t) = t\sigma^2$

${}_{t-1}E(x_t) = x_{t-1} + \delta$

Setzt man zusätzlich $\delta = 0$, so ergibt sich ein reiner Random Walk:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t = x_0 + \sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$$

➔ ${}_0E(x_t) = x_0$ und $\text{var}(x_t) = t\sigma^2$

${}_{t-1}E(x_t) = x_{t-1}$

C) Setzt man im trendstationären Prozess $\delta = 0$ (mit 0< ρ <1), so erhält man einen ***stationären AR(1)-Prozess*** (γ ist zu μ umbenannt):

$$(x_t - \mu) = \rho(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \qquad \text{mit } \varepsilon_t \sim \text{IN}(0, \sigma^2) \text{ und } 0 < \rho < 1$$

Fortlaufende Rückwärtssubstitution $(x_{t-1} - \mu) = \rho(x_{t-2} - \mu) + \varepsilon_{t-1}$ ergibt schliesslich:

$$x_t - \mu = \rho^t (x_0 - \mu) + \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \rho^{t-1}\varepsilon_1$$

$$x_t - \mu = \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \rho^{t-1}\varepsilon_1 \quad (\text{da } \rho^t \to 0)$$

➔ $\quad {}_0E(x_t) = \mu \quad$ und $\quad \text{var}(x_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}$

$${}_{t-1}E(x_t) = \mu + \rho(x_{t-1} - \mu)$$

Alternativ kann man in der Gleichung für den stationären AR(1)-Prozess μ auf die rechte Seite schaffen,

$x_t = \mu(1-\rho) + \rho\, x_{t-1} + \varepsilon_t$ und $\mu(1-\rho)$ in α' umbenennen:

$$x_t = \alpha' + \rho\, x_{t-1} + \varepsilon_t$$

In dieser Form ist der langfristige Erwartungswert durch

$${}_0E(x_t) = \frac{\alpha'}{1-\rho}$$ gegeben.

Die unter A) und C) beschriebenen Prozesse sind I(0)-Prozesse.

Der unter B) beschriebene Prozess ist ein I(1)-Prozess.

2. Beziehung zwischen verschiedenen dynamischen Formulierungen ökonometrischer Gleichungen

Grundgleichung:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \quad \text{oder vereinfacht} \quad y_t = \beta x_t + u_t$$

A) Modell mit *teilweiser Anpassung* (partial adjustment model)

$$y_t^* = \beta x_t$$

$$y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda) y_{t-1} + u_t$$

$$y_t = \lambda \beta x_t + (1-\lambda) y_{t-1} + u_t \qquad \text{Parameter: } \beta, \lambda$$

B) Modell mit *autokorreliertem Störterm*

$$y_t = \beta x_t + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$$

$$\rho y_{t-1} = \rho \beta x_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta (x_t - \rho x_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$$

$$y_t = \rho y_{t-1} + \beta x_t - \rho \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{Parameter: } \beta, \rho$$

C) *Fehlerkorrektur-Modell*

$$\Delta y_t = b \Delta x_t - \gamma (y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + u_t$$

$$y_t = (1-\gamma) y_{t-1} + b x_t + (\gamma \beta - b) x_{t-1} + u_t$$

Parameter: β, b, γ

Restriktionen:

3a. $b = \gamma \beta$ Das Fehlerkorrektur-Modell spezialisiert sich zu einem "partial adjustment"-Modell mit $\lambda = \gamma$.

3b. $b = \beta$ Das Fehlerkorrektur-Modell spezialisiert sich zu einem Modell mit autokorreliertem Störterm mit $\rho = 1 - \gamma$.

3. Dynamischer Anpassungsprozess im Fehlerkorrektur-Modell

Langfristige Gleichgewichtsbeziehung zwischen einer abhängigen Variablen y und einer exogenen Variablen x:

(1) $y_t = \alpha + \beta x_t$

Dynamische Anpassung der abhängigen Variablen y an eine Veränderung der exogenen Variablen x (Fehlerkorrektur-Modell):

(2) $\Delta y_t = \rho \Delta y_{t-1} + b \Delta x_t - \gamma (y_{t-1} - \alpha - \beta x_{t-1})$

- Die langfristige Reaktion von y auf eine Veränderung von x wird von Parameter β gemessen.

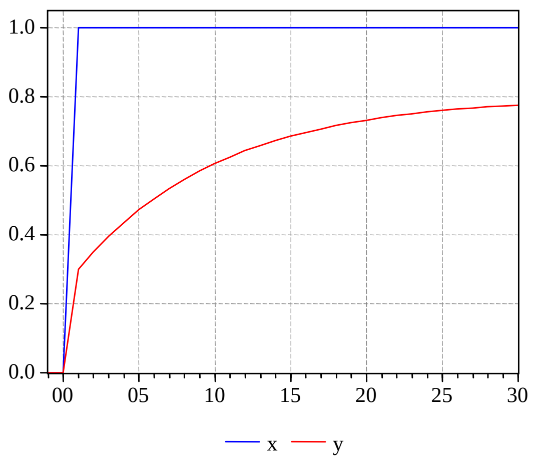
- Die Anpassungsgeschwindigkeit von y an das langfristige Gleichgewicht wird von Parameter γ gemessen.

- Die Parameter b und ρ charakterisieren die kurzfristige Reaktion von y.

Zur Illustration des von Gleichung (2) beschriebenen Anpassungsprozesses setzen wir die Parameter wie folgt fest:

$\alpha = 0, \quad \beta = 0.8, \quad \gamma = 0.1, \quad b = 0.3, \quad \rho = 0$

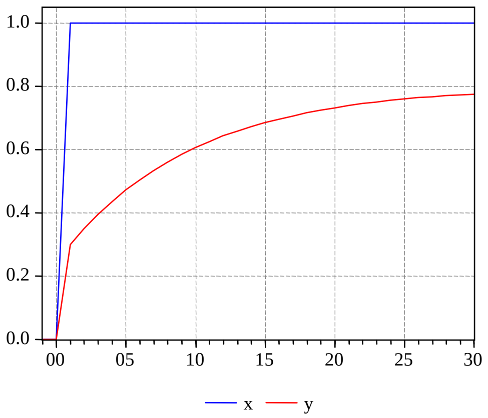
Wir nehmen für y und x Startwerte von 0 an und lassen x in einer bestimmten Zeitperiode von 0 auf 1 springen. Anschliessend bleibt x auf dem Niveau von 1 konstant. Die Reaktion von y auf diese Änderung von x sieht folgendermassen aus:



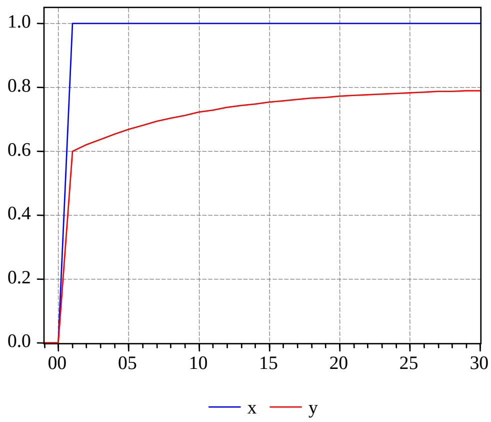
In der Periode, in der x von 0 auf 1 zunimmt, steigt y um 0.3 (b). Langfristig erhöht sich y um 0.8 (β).
Die Konvergenz zu diesem neuen Gleichgewichtswert ist relativ langsam (γ = 0.1).

Zur weiteren Illustration verändern wir die Parameter γ, b und ρ, während α und β unverändert auf den Werten 0 und 0.8 bleiben. Somit ändert sich an der langfristigen Reaktion von y nichts. Nur der Anpassungspfad zum neuen Gleichgewicht verändert sich.

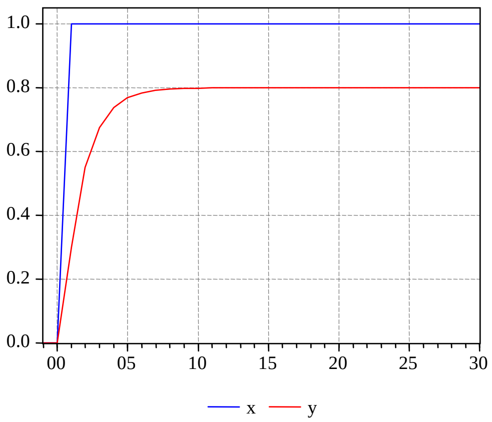
a) $\gamma = 0.1 \quad b = 0.3 \quad \rho = 0$



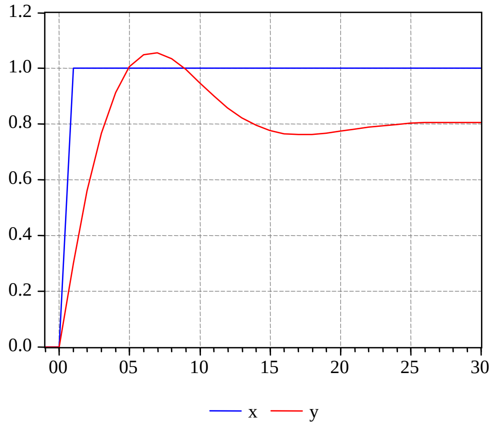
b) $\gamma = 0.1 \quad b = 0.6 \quad \rho = 0$



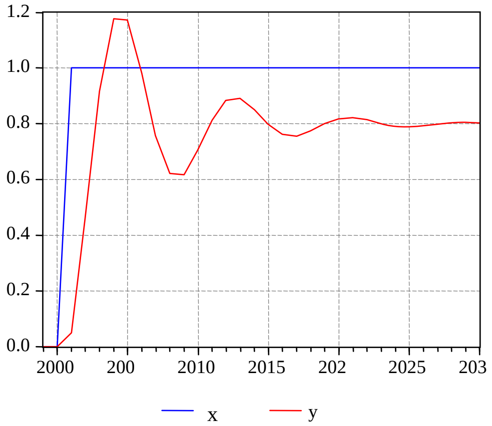
c) $\gamma = 0.5 \quad b = 0.3 \quad \rho = 0$



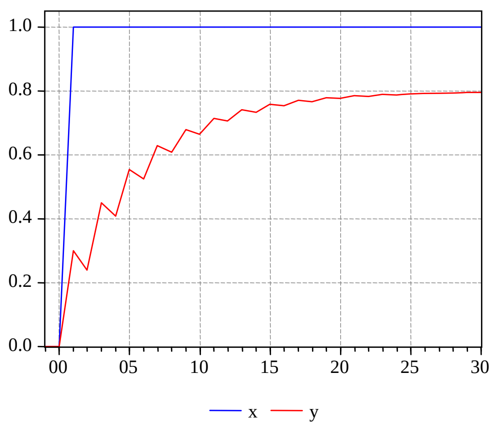
d) $\gamma = 0.1 \quad b = 0.3 \quad \rho = 0.7$



e) $\gamma = 0.5 \quad b = 0.05 \quad \rho = 0.7$



f) $\gamma = 0.3 \quad b = 0.3 \quad \rho = -0.7$



Häufig ist es so, dass die ökonomische Theorie nur Anhaltspunkte über langfristige Gleichgewichtsbeziehungen liefert, während man die "Anpassungsdynamik" aus einer Datenanalyse ableiten muss. Die theoretisch begründete Beziehung ist somit Gleichung (1), während die zusätzlichen Parameter in Gleichung (2) - γ, b und ρ – rein empirischen Charakter haben.

Natürlich lassen sich Anpassungspfade wie oben dargestellt nicht direkt in dieser reinen Form beobachten. Erstens enthält eine ökonometrische Gleichung stets einen Störterm u_t, d.h. Gleichung (2) sieht effektiv so aus:

$$\Delta y_t = \rho\,\Delta y_{t-1} + b\,\Delta x_t - \gamma\left(y_{t-1} - \alpha - \beta\,x_{t-1}\right) + u_t$$

Zweitens ist die exogene Variable x_t im Allgemeinen fortlaufenden Änderungen unterworfen.

Drittens können in einer Fehlerkorrektur-Gleichung auch mehrere exogene Variablen vorkommen, z.B. x_1 und x_2:

$$\Delta y_t = \rho\,\Delta y_{t-1} + b_1\,\Delta x_{1t} + b_2 \Delta x_{2t} - \gamma\left(y_{t-1} - \alpha - \beta_1\,x_{1t-1} - \beta_2 x_{2\,t-1}\right) + u_t$$

Des weiteren können auch mehrere ρ-Terme und weitere gelagte Δx-Terme in die Gleichung eingebaut werden. Dies kann dazu dienen, Autokorrelation des Störterms zu verhindern. Zum Beispiel:

$$\Delta y_t = \rho_1\,\Delta y_{t-1} + \rho_2 \Delta y_{t-2} + b_1\,\Delta x_t + b_2\,\Delta x_{t-1} - \gamma\left(y_{t-1} - \alpha - \beta\,x_{t-1}\right) + u_t$$

Wenn eine Fehlerkorrektur-Gleichung geschätzt ist, lässt sich jedoch die Reaktion von y auf eine vorgegebene Veränderung einer x-Variablen in der oben gezeigte Form anhand einer *Modellsimulation* darstellen.

4. Welches ist die adäquate Trendbereinigung einer Zeitreihe?

Entscheidungsgrundlage ist ein "Unit root"-Test:

H0: Der datengenerierende Prozess ist $I(1)$

H1: Der datengenerierende Prozess ist $I(0)$ im Sinne von "trendstationär"

Unter H0:
Eine $I(1)$-Variable wird durch einmaliges Differenzieren stationär. Man sagt auch: Die Variable ist *differenzenstationär.*

Die adäquate Trendbereinigung besteht somit in einer Differenzenbildung:

$$x_t \sim I(1) \quad \Rightarrow \quad \Delta x_t = x_t - x_{t-1} \sim I(0)$$

Unter H1:
Eine *trendstationäre* Variable wird durch Abziehen eines linearen Zeittrends stationär:

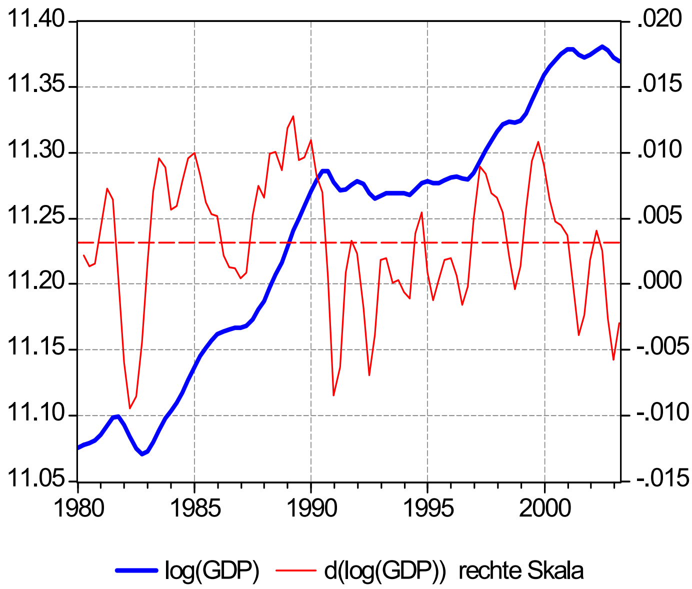
$$x_t = \alpha + \beta t + u_t \ , \quad u_t \sim I(0) \quad \Rightarrow \quad x_t - \alpha - \beta t = u_t \sim I(0)$$

Zum Beispiel **reales Bruttoinlandprodukt der Schweiz** (GDP).

In seiner Entwicklung widerspiegeln sich zwei Phänomene: ***Wachstum*** (langfristiger Trend) und ***Konjunktur*** (kurzfristige Schwankungen). Wie soll diese Dekomposition vorgenommen werden?

Unter H0:

Trendbereinigung durch Differenzenbildung: log(GDP) wird in d(log(GDP)) (Quartalswachstumsraten) übergeführt.



Der Durchschnittswert von d(log(GDP)) beträgt rund 0.0032 oder 0.32%. Umgerechnet auf das Jahr ergibt dies eine BIP-Wachstum von rund 1.3%.

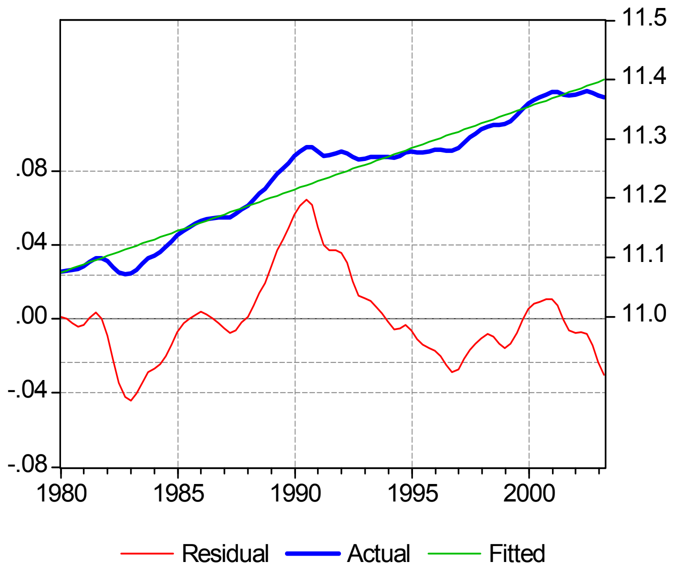
Unter H1:

Trendbereinigung durch Elimination eines linearen Trends

Sample: 1980:1 2003:2
Included observations: 94
log(GDP) = C(1)+C(2)*@TREND

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	11.07445	0.004805	2304.850	0.0000
C(2)	0.003496	8.92E-05	39.17324	0.0000

R-squared	0.943438	Mean dependent var	11.23702
Adjusted R-squared	0.942824	S.D. dependent var	0.098189
S.E. of regression	0.023478	Akaike info criterion	-4.644420
Sum squared resid	0.050714	Schwarz criterion	-4.590307
Log likelihood	220.2877	Durbin-Watson stat	0.046208



Das Residuum der Regression misst die Trendabweichung. Das Trendwachstum wird auf rund 0.35 % pro Quartal oder 1.4% pro Jahr geschätzt.

Ein "unit root"-Test zeigt, dass log(GDP) eher als I(1) und damit als differenzenstationär zu betrachten ist (H0 kann nicht abgelehnt werden, THETA ist nicht signifikant negativ bzw. RHO ist nicht signifikant kleiner als 1.

Folglich wird der Trend besser durch Differenzenbildung eliminiert.