Auswirkungen autokorrelierter Störterme auf OLS-Schätzungen

$y_t = \beta x_t + u_t$ Datengenerierender Prozess (t = 1, … , T)

$y_t = \hat{\beta} x_t + \hat{u}_t$ Schätzgleichung

Schätzung von $\hat{\beta}$ durch Minimierung der Summe der quadrierten Residuen (OLS):

$$RSS = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^{\,2} = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \hat{\beta} x_t\right)^2$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \hat{\beta} x_t\right) x_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_t y_t - \hat{\beta} \sum_{t=1}^{T} x_t^{\,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^{\,2}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}}$$

Erwartungswert von $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^{\,2}} = \frac{\sum x_t (\beta x_t + u_t)}{\sum x_t^{\,2}} = \beta + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^{\,2}}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{1}{\sum x_t^{\,2}} \underbrace{E\left(\sum x_t u_t\right)}_{}$$

$= 0$ falls $\text{cov}(u_t, x_t) = 0$ (d.h. x_t ist echt exogen).

=> $\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$

Schätzvarianz von $\hat{\beta}$:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{1}{\left(\sum x_t^2\right)^2} E\left(\sum x_t u_t\right)^2$$

$$E\left(\sum x_t u_t\right)^2 = E(x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots x_T u_T)(x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots x_T u_T)$$

$$= \left(x_1^2\sigma^2 + x_2^2\sigma^2 + \ldots x_T^2\sigma^2\right) \text{ falls } u_t \sim IN(0,\sigma^2) \text{ und folglich } \boxed{\text{cov}(u_t,u_{t-j}) = 0}$$

$$= \sigma^2 \sum x_t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}}$$

Falls $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ mit $\varepsilon_t \sim IN(0,\sigma_\varepsilon^2)$ und $0 < \rho < 1$ AR(1)-Prozess

sind die Kovarianzen $\text{cov}(u_t,u_{t-j})$ nicht Null sondern:

$$\boxed{\text{cov}(u_t,u_{t-1}) = \rho\sigma^2, \quad \text{cov}(u_t,u_{t-2}) = \rho^2\sigma^2, \ldots} \qquad \text{mit } \sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

und folglich:

$$E\left(\sum x_t u_t\right)^2 = E(x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots x_T u_T)(x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots x_T u_T)$$

$$= \sigma^2 \sum x_t^2 + 2\rho\sigma^2 \sum x_t x_{t-1} + 2\rho^2\sigma^2 \sum x_t x_{t-2} + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left(1 + 2\rho\frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + 2\rho^2\frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \ldots\right)}$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht dem Faktor, um den die Varianz von $\hat{\beta}$ durch die übliche OLS-Formel

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \quad \text{unterschätzt wird.}$$

Dieser Faktor ist insbesondere dann gross (wesentlich grösser als 1), wenn die exogene Variable *x* selber autokorreliert ist, was im Allgemeinen der Fall ist. Nimmt man für *x* einen AR(1)-Prozess mit Autokorrelationskoeffizienten η an, so gilt:

$$\boxed{\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left(1 + 2\rho\eta + 2\rho^2\eta^2 + \ldots\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left(\frac{1+\rho\eta}{1-\rho\eta}\right)}$$

Simulationsexperiment mit Eviews

Vorgegeben sei ein wahres ***Modell mit autokorreliertem Störterm*** (datengenerierender Prozess):

(1) $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ mit $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ und $\varepsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$

$\alpha = 4,\ \beta = 2$ $\sigma = 1.0\ ,\ \rho = 0.866$

$$\Rightarrow \text{var}(u) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} = \frac{1}{1-0.75} = 4$$

$$\text{sdev}(u) = 2$$

Es werden 100 künstliche Stichproben mit je 108 Beobachtungen (Quartalswerte 1970:1 bis 1996:4) generiert. Für jede Stichprobe werden die Parameter α, β und σ mit der Methode der kleinsten Quadrate (OLS) geschätzt. Das Simulationsexperiment dient zur Illustration der Verzerrungen und der Ineffizienz der OLS-Schätzung.

Konstruktion der 100 Stichproben

Zuerst wird die exogene Variable *x* nach dem folgenden Schema generiert:

$x_t = \eta x_{t-1} + v_t$ mit $\eta = 0.707\ ,\ x_0 = 0\ ,\ v_t \sim N(0,1)$

=> var(*x*) = 2

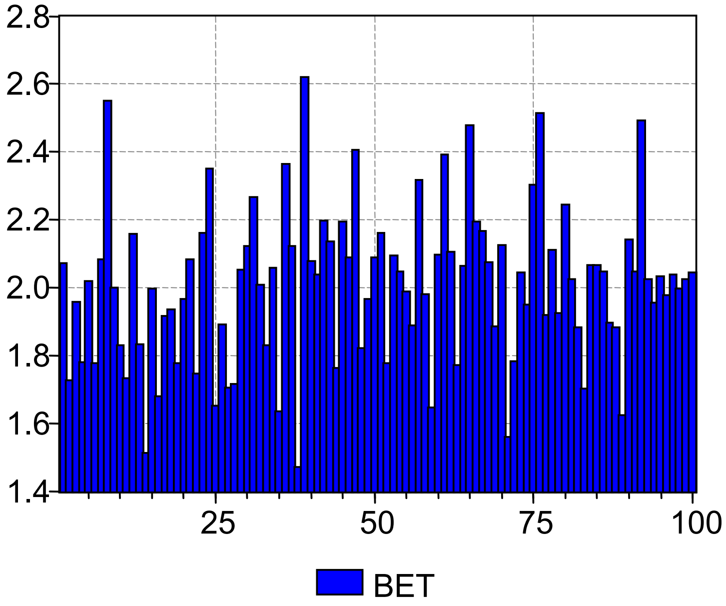
Die Variable *x* ist in allen 100 Stichproben gleich.

Dann werden mit einem Zufallszahlen-Generator 108 Werte aus $\varepsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$ gezogen und über (1) mit den vorgegebenen Parameterwerten ($\alpha = 4,\ \beta = 2\ ,\ \rho = 0.866$) 108 Werte für *y* bestimmt. Dieser Schritt wird 100 mal wiederholt.

=> 100 Stichproben mit je 108 Beobachtungswerten für *x* und *y*.

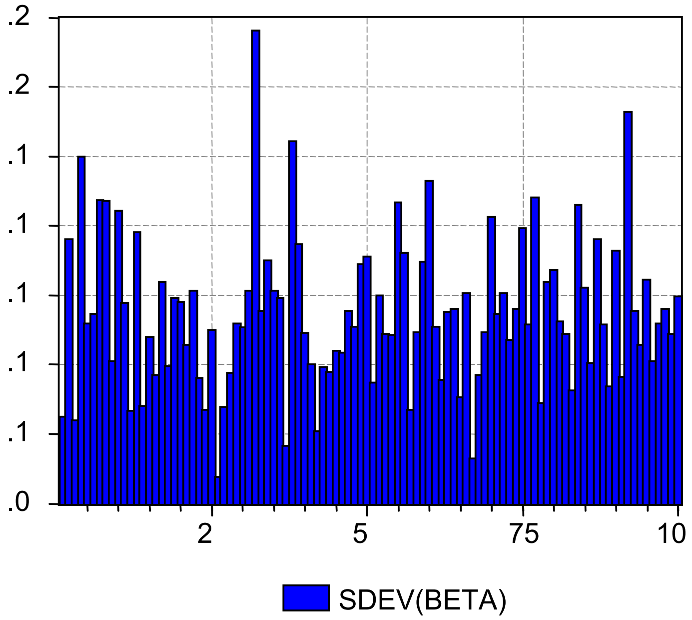
Schätzergebnisse

100 Schätzwerte für β und dazugehörige geschätzte Standardfehler



Geschätzte β 's:

Mean	2.005259
Median	2.025382
Maximum	2.619239
Minimum	1.470410
Std. Dev.	0.227488



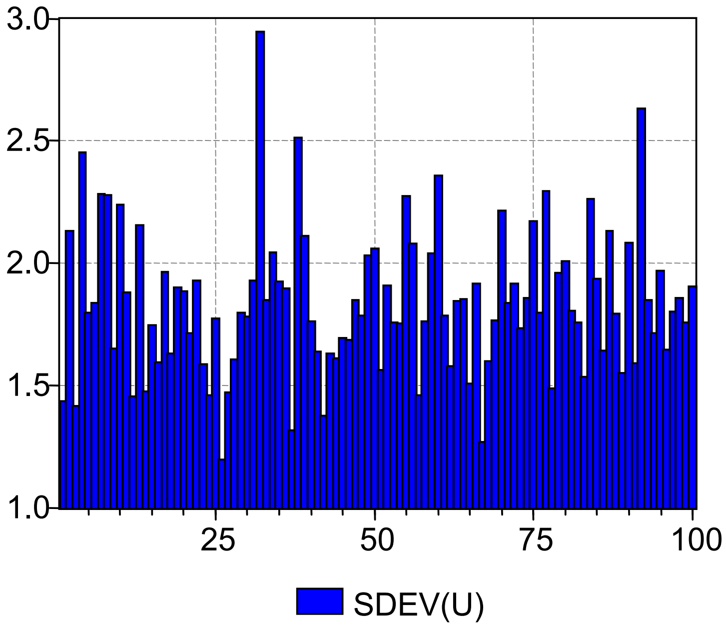
Standardfehler:

Mean	0.134705
Median	0.131920
Maximum	0.216109
Minimum	0.087612
Std. Dev.	0.021726

Die Unverzerrtheit der OLS-Schätzung für β (trotz autokorreliertem Störterm) zeigt sich darin, dass der Mittelwert der 100 Schätzwerte (2.005) praktisch dem wahren Wert von 2 entspricht.

Dagegen sind die Standardfehler der geschätzten β's verzerrt. Im Mittel der 100 Schätzungen beträgt der geschätzte Standardfehler 0.1347, während die 100 Schätzwerte von β effektiv eine Standardabweichung von 0.2275 aufweisen. Die Autokorrelation des Störterms führt also zu einer beträchtlichen Unterschätzung des Standardfehlers der geschätzten β's (und folglich zu einer Überschätzung der t-Werte).

Eine weitere Verzerrung zeigt sich hinsichtlich der Störterm-Varianz bzw. des daraus abgeleiteten Standardfehlers der Gleichung. Die im Simulations-experiment vorgegebene Störterm-Varianz beträgt var(u) = 4 bzw. die Standardabweichung sdev(u) = 2. Die in den 100 Schätzungen ausgewiese-nen Standardfehler der Gleichung sind aber etwas kleiner; im Durchschnitt der 100 OLS-Schätzungen ergibt sich ein Wert von 1.8375 (anstatt 2). Die Autokorrelation des Störterms führt also auch zu einer gewissen Unter-schätzung der Störterm-Varianz bzw. des Standardfehlers der Gleichung.



Standardfehler der Gleichung:

Mean	1.837534
Median	1.799544
Maximum	2.947978
Minimum	1.195126
Std. Dev.	0.296367

In der Schätzung Nr. 24 ergibt sich beispielsweise:

Y = ALFA + BETA*X

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
ALFA	4.011372	0.148934	26.93391	0.0000
BETA	2.350018	0.106991	21.96465	0.0000

R-squared 0.819865	Mean dependent var 5.100430
Adjusted R-squared 0.818165	S.D. dependent var 3.422620
S.E. of regression 1.459477	Akaike info criterion 3.612378
Sum squared resid 225.7877	Schwarz criterion 3.662047
Log likelihood -193.0684	Durbin-Watson stat 0.482271

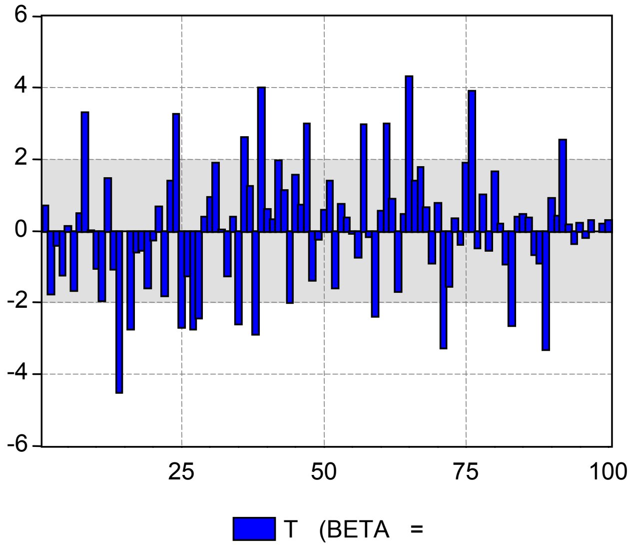
1) Die DW-Statistik von 0.482 zeigt das Autokorrelationsproblem an.
2) Der geschätzte Standardfehler von β beträgt 0.10699, während die 100 geschätzten β's effektiv mit einer Standardabweichung von 0.2275 um den wahren Wert von 2 schwanken.
3) Der Standardfehler der Gleichung wird auf 1.4595 geschätzt. Die wahre Standardabweichung des Störterms u beträgt aber 2.
4) Die richtige Null-Hypothese $\beta = 2$ wird in einem t-Test abgelehnt:

$$t = \frac{\hat{\beta} - 2}{SE(\hat{\beta})} = \frac{2.35 - 2}{0.10699} = 3.27 \quad >> 2$$

Dafür verantwortlich ist die Unterschätzung des Standardfehlers.

Zu 4)

In wie vielen der 100 Schätzungen wird die richtige Null-Hypothese β = 2 abgelehnt? Es ergeben sich die folgenden 100 berechneten t-Werte:



Auf einem Signifikanzniveau von 5% (t = 2) sollte die richtige Null-Hypothese mit 5% Wahrscheinlichkeit abgelehnt werden.

In den 100 Schätzungen wird sie aber – wegen der Unterschätzung des Standardfehlers – in 21 Fällen abgelehnt.

Zu 2 und 3)

Im vorliegenden Fall mit ρ = 0.866 (Autokorrelation des Störterms u) und η = 0.707 (Autokorrelation von x) lässt sich das Ausmass der Unterschätzung des Standardfehlers von β und des Standardfehlers der Gleichung analytisch bestimmen (Maddala, Kapitel 6.5):

Der Standardfehler von β ist approximativ um den Faktor

$\sqrt{\frac{1+\eta\rho}{1-\eta\rho}} = \sqrt{4.158} = 2.039$ unterschätzt.

Der Standardfehler der Gleichung ist approximativ um den Faktor

$1 \Big/ \sqrt{1-\frac{1+\eta\rho}{1-\eta\rho}\frac{1}{T}} = 1/\sqrt{0.9615} = 1.020$ unterschätzt (T = 108).

Diese Unterschätzung vermindert sich mit zunehmendem Stichprobenumfang T.

Schlussfolgerung

In einem Modell mit autokorreliertem Störterm (ohne zeitverzögerte endogene Variable auf der rechten Gleichungsseite) führt die Methode der kleinsten Quadrate (OLS):

- zu einer Unterschätzung der geschätzten Standardfehler der Parameter und somit zu einer Überschätzung der t-Werte.
- zu einer gewissen Unterschätzung des Standardfehlers der Gleichung.

Die Parameterschätzung selbst ist unverzerrt (A), aber nicht effizient (B).

Zu A: Zeitverzögerte endogene Variablen als Erklärende auf der rechten Gleichungsseite => Verzerrte Parameterschätzungen

Erscheint die endogene Variable zeitverzögert auf der rechten Gleichungsseite – wie z.B. im "partial adjustment"-Modell - so sind auch die Parameterschätzungen ***verzerrt.***

Grund:

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + u_t \longleftarrow u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_{t-1} = \alpha + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + u_{t-1}$$

Da y_{t-1} gemäss der zweiten Gleichung von u_{t-1} abhängig ist, ergibt sich bei autokorreliertem u_t in der ersten Gleichung eine Abhängigkeit zwischen y_{t-1} und u_t . Somit kann y_{t-1} nicht als exogen betrachtet werden. Bei positiver Autokorrelation des Störterms ($0 < \rho < 1$) ist y_{t-1} positiv mit u_t korreliert, was zu einer Überschätzung von β_2 führt. Ein Teil der positiven Autokorrelation des Störterms wird fälschlicherweise von y_{t-1} aufgefangen. Dies führt weiter dazu, dass die berechneten Residuen $\hat{u}_t$ im Vergleich zum Störterm u_t eine zu geringe Autokorrelation anzeigen. Deshalb ist die ***DW-Statistik nicht mehr aussagekräftig***; sie tendiert dazu, kein Autokorrelationsproblem anzuzeigen, auch wenn effektiv ein solches vorliegt. Man muss zum sogenannten ***Durbin-h-Test*** übergehen (vgl. Übung).

Zu B: Effizienz der Schätzung

Im Modell

(1) $y_t = \alpha + \beta_1 x_{1_t} + \beta_2 x_{2_t} + \ldots + u_t$

mit autokorreliertem Störterm

(2) $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ mit $-1 < \rho < 1$ und $\varepsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$

kann durch eine einfache Gleichungstransformation (nach Cochrane-Orcutt) eine unverzerrte und effiziente Schätzung gemacht werden.

Scheibt man (1) um eine Periode verzögert und multipliziert mit ρ, so ergibt sich:

(3) $\rho y_{t-1} = \rho\alpha + \rho\beta_1 x_{1_{t-1}} + \rho\beta_2 x_{2_{t-1}} + \ldots + \rho u_{t-1}$

Subtrahiert man (3) von (1), so erhält man:

(4) $y_t - \rho y_{t-1} = (1-\rho)\alpha + \beta_1(x_{1_t} - \rho x_{1_{t-1}}) + \beta_2(x_{2_t} - \rho x_{2_{t-1}}) + \ldots + u_t - \rho u_{t-1}$

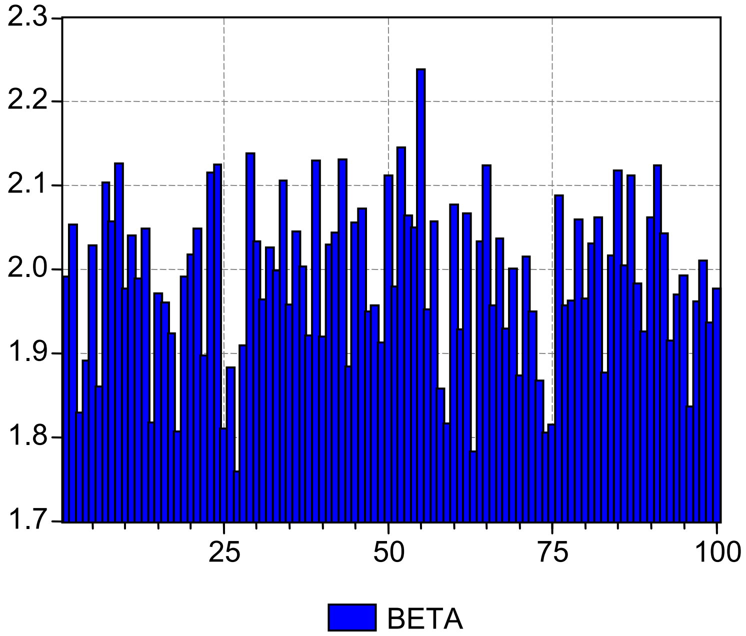
Gemäss Annahme (2) gilt nun $u_t - \rho u_{t-1} = \varepsilon_t$, d.h. Gleichung (4) hat einen Störterm mit der gewünschten Eigenschaft $\varepsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$. Man kann (4) auch wie folgt schreiben:

(4') $y_t - \rho y_{t-1} = (1-\rho)\alpha + \beta_1(x_{1_t} - \rho x_{1_{t-1}}) + \beta_2(x_{2_t} - \rho x_{2_{t-1}}) + \ldots + \varepsilon_t$

(4") $y_t = (1-\rho)\alpha + \rho y_{t-1} + \beta_1(x_{1_t} - \rho x_{1_{t-1}}) + \beta_2(x_{2_t} - \rho x_{2_{t-1}}) + \ldots + \varepsilon_t$

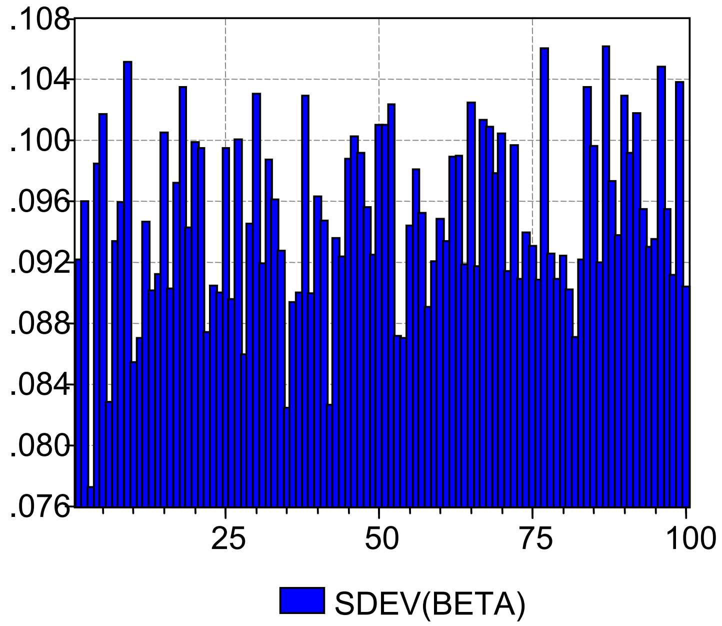
Wiederholt man die 100 Schätzungen nach diesem Verfahren (unter sonst gleichen Annahmen), so ergeben sich die folgenden Resultate:

Die 100 Schätzungen für β:



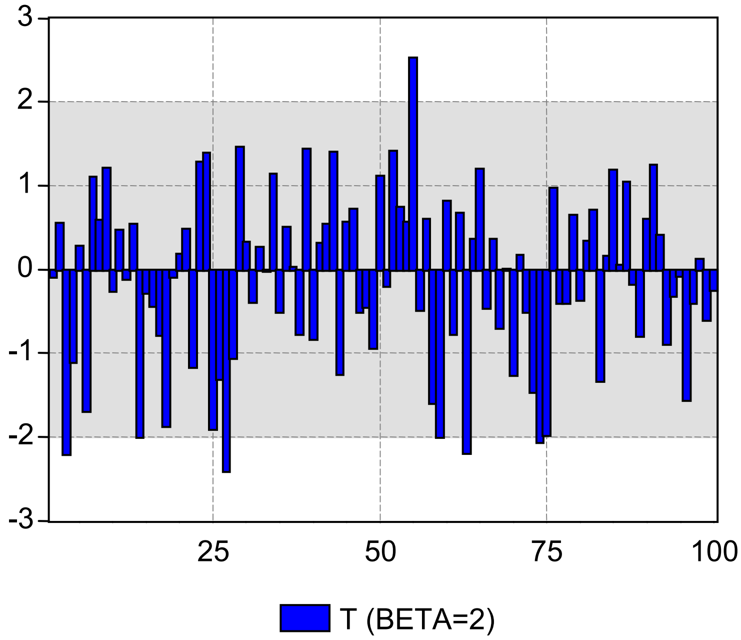
Mean	1.988590
Median	1.992198
Maximum	2.238542
Minimum	1.758983
Std. Dev.	0.096735

Der Effizienzgewinn zeigt sich in einer wesentlich kleineren Standardabweichung der geschätzten β's von 0.0967 (gegenüber 0.2275 in der untransformierten OLS-Schätzung). Die Standardabweichung von β wird zudem in den 100 Schätzungen ziemlich richtig geschätzt; sie beträgt im Mittel 0.0949:



Mean	0.094942
Median	0.094462
Maximum	0.106184
Minimum	0.077259
Std. Dev.	0.005788

Entsprechend wird die richtige Null-Hypothese β = 2 auf dem 5%-Signifikanzniveau (t = 2) in ungefähr 5 der 100 Fälle fälschlicherweise abgelehnt:



Das für dieses Simulationsexperiment verwendete EViews-Programm ist auf der folgenden Seite abgedruckt. Sie finden den Programmcode auf der Internetseite im Anhang zu Ökonometrie I als Simulationsprogramm 3. Der Zufallszahlengenerator ist mit "rndseed(type=kn4) auf die Version 4 zurückgesetzt.

Die verzerrten OLS-Schätzungen erhält man, indem man a) wählt und b) "auskommentiert":

```
' a) OLS (verzerrt):
 equation test!j.ls y = alfa(!j)+beta(!j)*x
 ncoef = 2

' b) Transformation nach Cochrane/Orcutt (korrekt)
 ' equation test!j.ls y = (1-rho(!j))*alfa(!j)+beta(!j)*(x-rho(!j)*x(-1))+rho(!j)*y(-1)
 ' ncoef = 3
```

Die unverzerrten Cochrane/Orcutt-Schätzungen erhält man, indem man b) wählt und a) "auskommentiert:

```
' a) OLS (verzerrt):
 ' equation test!j.ls y = alfa(!j)+beta(!j)*x
 ' ncoef = 2

' b) Transformation nach Cochrane/Orcutt (korrekt)
 equation test!j.ls y = (1-rho(!j))*alfa(!j)+beta(!j)*(x-rho(!j)*x(-1))+rho(!j)*y(-1)
 ncoef = 3
```

Programmcode EViews

```
' SimAutoCorr.prg:
' Regression mit künstlich generierten Daten
' Schätzung einer Gleichung y = alfa + beta*x + u
' mit autokorreliertem Störterm u

' Öffnen eines Workfiles und Festlegen des Stichprobenumfangs
        workfile simpreg Q 1969:4 1996:4

' Generieren einer erklärenden  Variablen x mit Erwartungswert 0
' und Standardabweichung 2
        rndseed(type=kn4) 312
        genr v = nrnd
        genr x = 0
        smpl 1970:1 1996:4
        genr x = 0.707*x(-1)+v

FOR !j = 1 to 100

' Generieren von y mit einem "wahren Modell" mit den Parametern
' alfa=4,  beta=2,  sigma=1 und rho = 0.866
        scalar xseed = 571+!j
        rndseed(type=kn4) xseed
        genr e = nrnd                               ' sigma=1
        smpl 1969:4 1996:4
        genr u = 0
        smpl 1970:1 1996:4
        genr u = 0.866*u(-1)+e              ' rho=0.866
        genr y = 4 + 2*x + u                        ' alfa=4, beta=2
        genr u!j = u

        scalar ncoef
        coef(100) alfa
        coef(100) beta
        coef(100) rho
        coef(100) tbeta2
        coef(100) sdbeta
        coef(100) seofeq
        coef(100) rquadrat
        coef(100) dw

' Schätzung der Gleichung: a) oder b) wählen

   ' a) OLS (verzerrt):
    ' equation test!j.ls y = alfa(!j)+beta(!j)*x
    ' ncoef = 2

   ' b) Transformation nach Cochrane/Orcutt (korrekt)
    equation test!j.ls y = (1-rho(!j))*alfa(!j)+beta(!j)*(x-rho(!j)*x(-1))+rho(!j)*y(-1)
    ncoef = 3

        genr res!j = resid
        sdbeta(!j) = sqr(@covariance(ncoef,ncoef))
        tbeta2(!j) = (beta(!j)-2)/sdbeta(!j)
        seofeq (!j) = @se
        rquadrat(!j) = @r2
        dw(!j) = @dw

NEXT
```